

具有边界扰动柔性机械臂的鲁棒自适应边界控制*

翁 轩¹, 杨龙刚², 刘 屿¹, 赵志甲¹, 邬依林³

(1. 华南理工大学自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640;

2. 广东省电信规划设计院有限公司, 广东 广州 510630;

3. 广东第二师范学院计算机科学系, 广东 广州 510310)

摘 要: 针对边界未知扰动和系统结构参数均具有不确定性的柔性机械臂系统, 为了抑制其振动和提高振动控制效果, 通过对柔性臂的结构参数估计, 采用自适应和边界控制技术, 设计了带有边界扰动观测器的鲁棒自适应边界控制对柔性臂振动进行控制。所设计控制算法能补偿结构参数不确定性和避免了控制溢出, 边界扰动观测器能抑制和跟踪边界未知扰动的影响。随后利用 Lyapunov 综合法对控制系统的稳定性和一致有界性进行了证明。仿真结果进一步验证了该控制算法对抑制柔性臂振动的有效性。

关键词: 柔性机械臂; 边界控制; 鲁棒自适应控制; 边界扰动观测器

中图分类号: TP24 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2015)03-0044-07

Robust Adaptive Boundary Control of a Flexible Manipulator with Unknown Boundary Disturbance

WENG Xuan¹, YANG Longgang², LIU Yu¹, ZHAO Zhijia¹, WU Yilin³

(1. School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. Guangdong Planning and Designing Institute of Telecommunications Corporation Limited, Guangzhou 510630, China;

3. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou 510310, China)

Abstract: To suppress the vibration and improve the vibration control for a flexible manipulator with the system parametric uncertainty and unknown boundary disturbance uncertainty, a robust adaptive boundary control with boundary disturbance observer is proposed by using adaptive control and boundary control technologies based on the manipulator's parameter estimation to suppress the vibration of the manipulator. With the proposed control scheme, system parameter uncertainty can be compensated and the control spillover problem can be avoided, and the boundary disturbance observer can attenuate and track the unknown boundary disturbance. The stability and uniform boundedness of the control system are both proved by Lyapunov's synthesis method. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed control method to suppress the manipulator's vibration.

Key words: flexible manipulator; boundary control; robust adaptive control; boundary disturbance observer

* 收稿日期: 2015-01-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61203060); 广东省科技计划资助项目(2013B010402011, 2013B090600016); 广东第二师范学院教授博士科研专项经费资助项目(2014ARF25)

作者简介: 翁轩(1992年生), 男; 研究方向: 分布参数系统控制; 通讯作者: 刘屿; E-mail: auylau@scut.edu.cn

柔性机械臂被广泛的应用于机器人、机械工程和航天技术等领域。然而其弹性变形产生的振动现象将直接影响柔性臂的操作精度和工作性能，限制其在高精度要求领域的应用^[1-2]。因此，近年来柔性臂振动控制问题再次得到越来越多的重视。

柔性机械臂系统是一类具有强耦合、非线性、时变等特点的机电耦合分布参数系统，其动力学模型由偏微分和常微分方程混合描述^[3]，具有无穷维特点，因此直接对其控制设计具有很大难度，传统控制方法则大多数将其线性化为有限维常微分方程进行控制设计^[4-6]，但仅对几个关键模态进行控制时，未建模高频模态可能到来溢出效应并影响系统稳定性^[5-6]。边界控制因能避免控制溢出、易构造 Lyapunov 函数和无需分布传感器/控制器等独特优势而广泛应用于柔性结构的振动主动控制^[7-10]，近年柔性臂振动控制研究成果将边界控制与诸如自适应、鲁棒、反步等先进控制方法相结合^[1,11-15]，基于结构无限维模型直接进行振动主动控制设计，取得较好效果并避免了溢出问题。然而，目前国内外绝大多数研究成果并未考虑边界未知扰动的情况，但在实际柔性臂系统中，由于边界驱动器的原因，系统不仅仅存在边界扰动，边界扰动还具有很强的不确定性。同时，柔性臂系统的结构参数也具有不确定性，诸如其张力、弯曲刚度等参数通常是未知或难以准确测量，甚至部分结构参数可能随柔性臂振动偏移量的变化而变化。因此，为了提高柔性臂振动控制效果和品质，要求所设计的控制算法具有较好的鲁棒性和自适应能力，能补偿系统结构参数和边界扰动的不确定性。

本文将研究柔性机械臂系统在边界未知扰动作用下，其结构参数未知或不可测时的振动主动控制问题。基于柔性臂无限维分布参数模型，通过对其参数进行估计，采用自适应和边界控制技术，设计带有边界扰动观测器的鲁棒自适应边界控制器对柔性臂的振动进行控制，以算法自适应能力补偿系统结构参数的不确定性，以边界扰动观测器对边界未知扰动进行跟踪、抑制和补偿，从而改善柔性臂的振动控制效果。其后运用 Lyapunov 综合法对柔性臂系统稳定性和一致有界性给予证明。最后给出所设计控制器有效性和可靠性的仿真研究结果。

1 柔性机械臂动力学模型

注 1 本文做如下简写假设： $(\cdot)(t) = (\cdot)$ ， $(\cdot)(x,t) = (\cdot)$ ， $(\cdot)'(x,t) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ ， $(\cdot)(x,t) =$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}。$$

图 1 为典型具有边界未知扰动的柔性机械臂，其中 $y(x, t)$ 为 t 时刻在位置 x 处的偏移量。

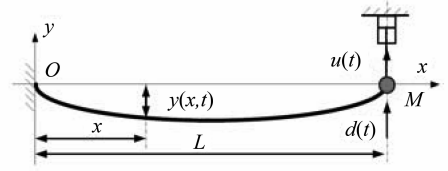


图 1 具有边界未知扰动的柔性机械臂
Fig. 1 The flexible manipulator with unknown boundary disturbance

本文所研究柔性机械臂系统的模型将直接引用项目组的前期研究成果文献 [14]，即由文献 [14] 中式(5) - (6)可得本文研究的柔性机械臂动力学模型。柔性臂系统的控制方程为

$$\rho \ddot{y} + EI y'''' - Ty'' + c \dot{y} = 0 \quad (1)$$

其中 $\forall (x, t) \in (0, L) \times [0, +\infty)$ ， ρ 为柔性臂单位长度质量， L 为柔性臂长度， EI (以下简称为 E) 为机械臂弯曲刚度， T 为机械臂张力， c 为结构阻尼系数。

系统边界条件为

$$\begin{cases} y'(0,t) = y''(L,t) = y(0,t) = 0, \\ M \ddot{y}(L,t) - E y'''(L,t) + d_s \dot{y}(L,t) + Ty'(L,t) = u + d \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\forall t \in [0, +\infty)$ ， M 为控制器质量， d_s 为载荷阻尼系数， $d(t)$ 为边界扰动， $u(t)$ 为控制输入。

柔性臂系统的初始条件为

$$y(x,0) = \dot{y}(x,0) = 0 \quad (3)$$

假设 1 对于未知扰动 $d(t)$ ，若存在常数 $\bar{d}, d_m \in \mathbf{R}^+$ ，有 $|d(t)| \leq \bar{d}, \forall (x, t) \in (0, L) \times [0, +\infty)$ 。这个假设是合理的，因为边界未知扰动 $d(t)$ 是外源的，具有有限能量，因此是有界的^[7-8,14]。

2 控制设计

本节利用 Lyapunov 综合法在柔性臂右边界设计一个带有边界扰动观测器的鲁棒自适应边界控制，通过控制作用对柔性臂的振动进行抑制，设计的控制算法具有较好的鲁棒性和自适应性，从而能补偿柔性臂系统的不确定性，并能实现对边界未知扰动的跟踪。

2.1 预备知识

为方便随后各章节的研究工作，给出如下引理

和性质^[7-8,14]。

引理 1 令 $\varphi_1(x,t), \varphi_2(x,t) \in \mathbf{R}$, 其中 $x \in [0, L], t \in [0, +\infty)$, 当 $\sigma > 0$ 时下列等式成立

$$\varphi_1\varphi_2 \leq |\varphi_1\varphi_2| \leq \varphi_1^2 + \varphi_2^2, |\varphi_1\varphi_2| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\varphi_1 \right) (\sqrt{\sigma}\varphi_2) \right| \leq \frac{1}{\sigma}\varphi_1^2 + \sigma\varphi_2^2 \quad (4)$$

引理 2 设 $\varphi(x,t) \in \mathbf{R}$ 为定义在 $x \in [0, L], t \in [0, +\infty)$ 的函数, 且满足边界条件 $\varphi(0,t) = 0, \forall t \in [0, \infty)$, 则有如下不等式组成立

$$\int_0^L \varphi^2 dx \leq L^2 \int_0^L (\varphi')^2 dx, \varphi^2 \leq L \int_0^L (\varphi')^2 dx \quad (5)$$

2.2 自适应边界控制

对于由式 (1) - (3) 描述的柔性臂系统, 若其结构参数 EI, T, d_s 和 M 未知或不可测, 为使该系统稳定, 提出以下鲁棒自适应边界控制律

$$u = \widehat{T}y'(L,t) - \widehat{E}y'''(L,t) + \widehat{d}_s\dot{y}(L,t) + \widehat{M}[\dot{y}'''(L,t) - \dot{y}'(L,t)] - kv - \widehat{d} \quad (6)$$

其中 $k > 0$ 为控制增益, $\widehat{T}, \widehat{E}, \widehat{d}_s, \widehat{M}$ 和 \widehat{d} 分别为 T, E, d_s, M 和 d 的估计值, 辅助控制 v 为

$$v = \dot{y}(L,t) + y'(L,t) - y'''(L,t) \quad (7)$$

式 (7) 对时间求导并乘以 M , 再代入式 (2) 得

$$M\dot{v} = Ey'''(L,t) - Ty'(L,t) - d_s\dot{y}(L,t) - M[\dot{y}'''(L,t) - \dot{y}'(L,t)] + d + u \quad (8)$$

定义边界扰动估计 \widehat{d} 为

$$\widehat{d} = \varphi(t) + M\dot{y}(L,t) \quad (9)$$

上式对时间求导, 得观测器为

$$\dot{\widehat{d}} = \dot{\varphi}(t) + M\dot{y}(L,t) \quad (10)$$

其中

$$\dot{\varphi}(t) = v - M\dot{y}(L,t) - \varphi(t) + d_s\dot{y}(L,t) - u - Ey'''(L,t) + Ty'(L,t) \quad (11)$$

边界扰动误差 \widetilde{d} 为

$$\widetilde{d} = d - \widehat{d} \quad (12)$$

上式对时间求导, 在结合式 (2)、式 (9) - (12) 可得

$$\dot{\widetilde{d}} = \dot{d} - \dot{\widehat{d}} - v \quad (13)$$

定义柔性臂结构参数估计误差为

$$\begin{aligned} \widetilde{E} &= E - \widehat{E}, \widetilde{T} = T - \widehat{T}, \\ \widetilde{d}_s &= d_s - \widehat{d}_s, \widetilde{M} = M - \widehat{M} \end{aligned} \quad (14)$$

若设计自适应控制律

$$\begin{cases} \dot{\widehat{E}} = -\gamma_1\zeta_1\widehat{E} + \zeta_1y'''(L,t)v, \\ \dot{\widehat{T}} = -\gamma_2\zeta_2\widehat{T} - \zeta_2y'(L,t)v, \\ \dot{\widehat{d}}_s = -\gamma_3\zeta_3\widehat{d}_s - \zeta_3\dot{y}(L,t)v, \\ \dot{\widehat{M}} = -\gamma_4\zeta_4\widehat{M} - \zeta_4[\dot{y}'''(L,t) - \dot{y}'(L,t)]v \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ 和 ζ_4 均为正常数。

对式 (14) 对时间求导, 再代入式 (15) 则有

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{E}} = \gamma_1\zeta_1\widetilde{E} - \zeta_1y'''(L,t)v, \\ \dot{\widetilde{T}} = \gamma_2\zeta_2\widetilde{T} + \zeta_2y'(L,t)v, \\ \dot{\widetilde{d}}_s = \gamma_3\zeta_3\widetilde{d}_s + \zeta_3\dot{y}(L,t)v, \\ \dot{\widetilde{M}} = \gamma_4\zeta_4\widetilde{M} + \zeta_4[\dot{y}'''(L,t) - \dot{y}'(L,t)]v \end{cases} \quad (16)$$

注 2 鲁棒自适应边界控制式 (6) 中所有信号均可由传感器测得或由向后差分算法计算得到。 $y(L,t), y'(L,t)$ 和 $y'''(L,t)$ 可分别由位移、倾角和剪力传感器测得, $y(L,t), y'(L,t)$ 和 $y'''(L,t)$ 可分别由 $y(L,t), y'(L,t)$ 和 $y'''(L,t)$ 后向差分算法计算得到。

若给定候选 Lyapunov 函数为

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) + V_5(t) \quad (17)$$

其中能量项 $V_1(t)$ 为

$$V_1(t) = \frac{\beta\rho}{2} \int_0^L \dot{y}^2 dx + \frac{\beta E}{2} \int_0^L (y'')^2 dx + \frac{\beta T}{2} \int_0^L (y')^2 dx \quad (18)$$

$\beta > 0$, 附加项 $V_2(t)$ 为

$$V_2(t) = 0.5\lambda Mv^2 \quad (19)$$

其中 $\lambda > 0$, 交叉项 $V_3(t)$ 为

$$V_3(t) = \alpha\rho \int_0^L xy'\dot{y} dx \quad (20)$$

结构参数误差项 $V_4(t)$ 为

$$V_4(t) = \frac{\lambda}{2\zeta_1}\widetilde{E}^2 + \frac{\lambda}{2\zeta_2}\widetilde{T}^2 + \frac{\lambda}{2\zeta_3}\widetilde{d}_s^2 + \frac{\lambda}{2\zeta_4}\widetilde{M}^2 \quad (21)$$

边界扰动误差项 $V_5(t)$ 为

$$V_5(t) = 0.5\lambda\widetilde{d}^2 \quad (22)$$

引理 3 由式 (17) 给定的 Lyapunov 函数具有如下上下界

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathcal{D}_1[V_1(t) + V_2(t) + V_4(t) + V_5(t)] \leq \\ V(t) &\leq \mathcal{D}_2[V_1(t) + V_2(t) + V_4(t) + V_5(t)] \end{aligned} \quad (23)$$

其中 ϑ_1 和 ϑ_2 为两正常数。

证明 由式 (20) 可得

$$|V_3(t)| \leq \frac{\alpha \rho L}{2} \int_0^L [(y')^2 + y^2] dx \leq \xi V_1(t) \quad (24)$$

其中 $\xi = \frac{\alpha \rho L}{\min(\beta T, \beta \rho)}$ 。

不等式 (24) 改写为

$$-\xi V_1(t) \leq V_3(t) \leq \xi V_1(t) \quad (25)$$

若适当选取 ξ , 可以得到

$$\xi_1 = 1 - \xi > 0, \xi_2 = 1 + \xi > 1 \quad (26)$$

将不等式 (26) 分别代入式 (25) 可得

$$0 < \xi_1 V_1(t) \leq V_1(t) + V_3(t) \leq \xi_2 V_1(t) \quad (27)$$

结合 Lyapunov 函数式 (17), 由上式可得

$$0 \leq \vartheta_1 [V_1(t) + V_2(t) + V_4(t) + V_5(t)] \leq V(t) \leq \vartheta_2 [V_1(t) + V_2(t) + V_4(t) + V_5(t)] \quad (28)$$

其中 $\vartheta_1 = \min(\zeta_1, 1)$ 和 $\vartheta_2 = \max(\zeta_2, 1)$ 。证毕。

引理 4 由式 (17) 给定的候选 Lyapunov 函数对时间的导数具有如下上界

$$\dot{V}(t) \leq -\vartheta V(t) + \varepsilon \quad (29)$$

其中 $\vartheta, \varepsilon > 0$ 。

证明 将式 (17) 对时间求导有

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) + \dot{V}_4(t) + \dot{V}_5(t) \quad (30)$$

其中由式 (18) 可得

$$\dot{V}_1(t) = A_1 + A_2 + A_3 \quad (31)$$

其中 $A_1 = \beta \rho \int_0^L \ddot{y} \dot{y} dx$, $A_2 = \beta E \int_0^L \dot{y}'' y'' dx$ 和 $A_3 =$

$$\beta T \int_0^L \dot{y}' y' dx。$$

将式 (1) 代入 A_1 , 应用分部积分得

$$A_1 = \beta \int_0^L \dot{y} (T y'' - E y'''' - c \dot{y}) dx \quad (32)$$

对 A_2 和 A_3 进行分部积分可得

$$\begin{cases} A_2 = \beta E \int_0^L \dot{y} y'''' dx - \beta E \dot{y}(L, t) y'''(L, t), \\ A_3 = -\beta T \int_0^L \dot{y} y'' dx + \beta T \dot{y}(L, t) y'(L, t) \end{cases} \quad (33)$$

分别将式 (32) - (33) 代入式 (31), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = & -\frac{\beta E}{2} y^2(L, t) - \rho E \dot{y}(L, t) y'(L, t) - \\ & \frac{\beta E}{2} [y'(L, t)]^2 - \frac{\beta E}{2} [y'''(L, t)]^2 + \\ & \beta E y'''(L, t) y'(L, t) + \frac{\beta E}{2} v^2 + \end{aligned}$$

$$\beta T \dot{y}(L, t) y'(L, t) - \beta c \int_0^L \dot{y}^2 dx \quad (34)$$

将式 (19) 对时间求导, 并代入式 (6) 和式 (8) 得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & -\lambda k v^2 + \lambda v [\bar{d} + \bar{E} y'''(L, t) - \\ & \bar{T} y'(L, t) - \bar{d}_s \dot{y}(L, t) - \bar{M} \dot{y}'''(L, t) + \bar{M} \dot{y}'(L, t)] \end{aligned} \quad (35)$$

式 (20) 对时间求导, 代入边界条件式 (2), 并应用分部积分得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(t) \leq & -\alpha E L y'(L, t) y'''(L, t) + \\ & \frac{\alpha T L}{2} [y'(L, t)]^2 + \frac{\alpha \rho L}{2} y^2(L, t) - \left(\frac{\alpha T}{2} - \alpha c L \delta_1 \right) \cdot \\ & \int_0^L (y')^2 dx - \left(\frac{\alpha \rho}{2} - \frac{\alpha c L}{\delta_1} \right) \int_0^L \dot{y}^2 dx - \frac{3\alpha E}{2} \int_0^L (y'')^2 dx \end{aligned} \quad (36)$$

其中 δ_1 为任意的正常数。

式 (21) 对时间求导, 并结合式 (14) 和式 (16), 以及利用基本不等式可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) \leq & -\lambda \left(\frac{\gamma_1}{2} \bar{E}^2 + \frac{\gamma_2}{2} \bar{T}^2 + \frac{\gamma_3}{2} \bar{d}_s^2 + \frac{\gamma_4}{2} \bar{M}^2 \right) + \\ & \lambda \left(\frac{\gamma_1}{2} E^2 + \frac{\gamma_2}{2} T^2 + \frac{\gamma_3}{2} d_s^2 + \frac{\gamma_4}{2} M^2 \right) - \\ & \lambda v [\bar{E} y'''(L, t) - \bar{M} \dot{y}'''(L, t) - \bar{T} y'(L, t) - \\ & \bar{d}_s \dot{y}(L, t) + \bar{M} \dot{y}'(L, t)] \end{aligned} \quad (37)$$

根据式 (21) 和式 (37), 若定义

$$\vartheta_3 = \min(\zeta_1 \gamma_1, \zeta_2 \gamma_2, \zeta_3 \gamma_3, \zeta_4 \gamma_4) \quad (38)$$

则式 (37) 可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_4(t) \leq & -\vartheta_3 V_4(t) + \varepsilon_1 - \lambda v [\bar{E} y'''(L, t) - \\ & \bar{M} \dot{y}'''(L, t) - \bar{T} y'(L, t) - \bar{d}_s \dot{y}(L, t) + \bar{M} \dot{y}'(L, t)] \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $\varepsilon_1 = \lambda \left(\frac{\gamma_1}{2} E^2 + \frac{\gamma_2}{2} T^2 + \frac{\gamma_3}{2} d_s^2 + \frac{\gamma_4}{2} M^2 \right)$ 。

式 (22) 对时间求导, 代入式 (13) 并利用基本不等式得

$$\dot{V}_5(t) \leq -\lambda \bar{d} v - 0.5 \lambda \bar{d}^2 + 0.5 \lambda \bar{d}^2 \quad (40)$$

将式 (34) - (36) 和式 (39) - (40) 代入式 (30), 并结合假设 1、式 (16) 和不等式 (4) - (5) 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\vartheta_3 V_4(t) + \varepsilon - \left(\lambda k - \frac{\beta E}{2} \right) v^2 - \\ & E \left(\frac{\beta}{2} - |\beta - \alpha L| \delta_3 \right) [y'''(L, t)]^2 - \\ & \left(\frac{\beta E - \alpha T L}{2} - \frac{\beta |T - E|}{\delta_2} - \frac{E |\beta - \alpha L|}{\delta_3} \right) \cdot \\ & [y'(L, t)]^2 - \left(\frac{\beta E}{2} - \beta |T - E| \delta_2 - \frac{\alpha \rho L}{2} \right) \cdot \end{aligned}$$

$$[\dot{y}(L,t)]^2 - \frac{3\alpha E}{2} \int_0^L (y'')^2 dx - (\beta c + \frac{\alpha \rho}{2} - \frac{\alpha c L}{\delta_1}) \cdot \int_0^L \dot{y}^2 dx - (\frac{\alpha T}{2} - \alpha c L \delta_1) \int_0^L (y')^2 dx \quad (41)$$

其中 δ_2, δ_3 为任意的正常数。选择适当参数值 $k, \lambda, \alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ 和 δ_3 满足如下条件:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \beta c + \frac{\alpha \rho}{2} - \frac{\alpha c L}{\delta_1} > 0, \tau_2 = \frac{\alpha T}{2} - \alpha c L \delta_1 > 0, \\ \tau_3 &= \frac{3\alpha E}{2}, \tau_4 = \lambda k - \frac{\beta E}{2} > 0, \\ \tau_5 &= \frac{\beta E}{2} - \beta |T - E| \delta_2 - \frac{\alpha \rho L}{2} \geq 0, \\ \tau_6 &= \frac{\beta E}{2} - \frac{\beta |T - E|}{\delta_2} - \frac{E |\beta - \alpha L|}{\delta_3} - \frac{\alpha T L}{2} \geq 0, \\ \tau_7 &= \frac{\beta E}{2} - E |\beta - \alpha L| \delta_3 \geq 0, \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \frac{\lambda}{2} d_m^2, \vartheta_4 = \min(\frac{2\tau_1}{\rho}, \frac{2\tau_2}{T}, \frac{2\tau_3}{E}, \frac{2\tau_4}{M}, 1). \end{aligned}$$

结合引理 3, 式 (41) 可改写为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\vartheta_4 [V_1(t) + V_2(t) + V_5(t)] - \\ &\vartheta_3 V_4(t) + \varepsilon \leq -\vartheta_5 [V_1(t) + V_2(t) + \\ &V_4(t) + V_5(t)] + \varepsilon \leq -\vartheta V(t) + \varepsilon \quad (42) \end{aligned}$$

其中 $\vartheta_5 = \min(\vartheta_3, \vartheta_4)$ 和 $\vartheta = (\vartheta_5 / \vartheta_2)$ 。证毕。

2.3 稳定性分析

基于上述引理, 小本节给出柔性臂闭环系统的稳定性定理。

定理 1 由式 (1) - (3) 所描述的柔性臂闭环系统, 在假设 1 和控制器式 (6) 作用下, 有如下关系式成立。

1) 一致有界: 柔性臂闭环系统的振动偏移状态量 $y(x,t)$ 一致包含于 Ω_1 中

$$\begin{aligned} \Omega_1: &= \{y(x,t) \in \mathbf{R} \mid |y(x,t)| \leq \\ &\chi_1, \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty)\} \quad (43) \end{aligned}$$

其中 $\chi_1 = \sqrt{\frac{2L}{\beta T \vartheta_1} [V(0) + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]}$ 。

2) 一致最终有界: 柔性臂闭环系统的振动偏移状态量 $y(x,t)$ 最终收敛于 Ω_2 中

$$\begin{aligned} \Omega_2: &= \{w(x,t) \in \mathbf{R} \mid \lim_{t \rightarrow \infty} |w(x,t)| \leq \chi_2, \\ &\forall (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty)\} \quad (44) \end{aligned}$$

其中 $\chi_2 = \sqrt{\frac{2L\varepsilon}{\beta T \vartheta_1 \vartheta}}$ 。

证明 对式 (42) 乘以 $e^{\vartheta t}$, 并可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)e^{\vartheta t} &\leq -\vartheta V(t)e^{\vartheta t} + \varepsilon e^{\vartheta t} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} [V(t)e^{\vartheta t}] &\leq \varepsilon e^{\vartheta t} \quad (45) \end{aligned}$$

对上述不等式积分得

$$\begin{aligned} V(t) &\leq [V(0) - \frac{\varepsilon}{\vartheta}]e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta} \leq \\ V(0)e^{-\vartheta t} &+ \frac{\varepsilon}{\vartheta} \quad (46) \end{aligned}$$

其中上式表明 $V(t)$ 为有界。

由不等式 (5)、式 (18) 和式 (28) 可得

$$\begin{aligned} \frac{\beta T}{2L} y^2(x,t) &\leq \frac{\beta T}{2} \int_0^L (y')^2 dx \leq V_1(t) \leq \\ V_1(t) + V_2(t) + V_4(t) &\leq \frac{1}{\vartheta_1} V(t) \quad (47) \end{aligned}$$

将式 (46) 代入式 (47), 重排上述不等式得

$$\begin{aligned} |y(x,t)| &\leq \sqrt{\frac{2L}{\beta T \vartheta_1} [V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} \leq \\ &\sqrt{\frac{2L}{\beta T \vartheta_1} [V(0) + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} \quad (48) \end{aligned}$$

其中 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0,+\infty)$ 。则进一步可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} |y(x,t)| &\leq \sqrt{\frac{2L}{\beta T \vartheta_1} [V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} \leq \\ &\sqrt{\frac{2L\varepsilon}{\beta T \vartheta_1 \vartheta}}, \forall x \in [0,L] \quad (49) \end{aligned}$$

由式 (48) - (49) 可知定理 1 得以证明。证毕。

3 数字仿真

本节将数值仿真研究柔性机械臂的振动情况, 并验证所设计鲁棒自适应边界控制式 (6) 对柔性臂振动抑制的有效性。柔性臂系统参数为 $\rho = 1 \text{ kg/m}$, $M = 2 \text{ kg}$, $L = 10 \text{ m}$, $c = 1 \text{ Ns/m}^2$, $d_s = 1 \text{ Ns/m}$, $E = 50 \text{ Nm}^2$ 和 $T = 10 \text{ N}$, 边界未知扰动为

$$d(t) = 1 + \frac{1}{10} \sum_{i=1}^3 \sin(it) \quad (50)$$

当选择控制器参数 $k = 100$, 图 2-5 给出数字仿真验证结果, 其中图 2 为柔性臂在有/无控制作用下的振动偏移图, 图 3 则给出了柔性臂中部 ($x = 5 \text{ m}$) 和右边界 ($x = 10 \text{ m}$) 的振动偏移图, 图 4 为边界扰动跟踪图, 图 5 为鲁棒自适应边界控制输入。

由仿真结果图 2-3 可知, 当鲁棒自适应边界控制作用于柔性臂系统后, 其振动偏移量都有显著的减少, 验证了本文设计控制算法对抑制柔性臂振动是非常有效的; 由仿真结果图 3 可知, 虽然在柔性臂中部 ($x = 5 \text{ m}$) 并未布置控制器/传感器, 但其中部的振动也有十分显著的减小, 体现了边界控制技术在柔性结构振动控制方面的独特优势; 仿真结果图 4 表明边界干扰观测器能很好跟踪边界未

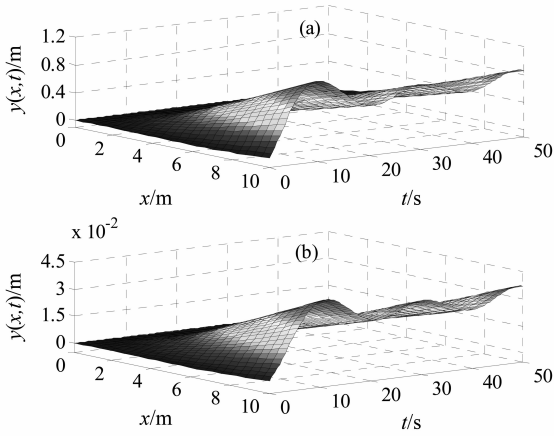


图2 柔性机械臂偏移量：(a) 无控制，(b) 有控制
Fig. 2 Displacements of manipulator: (a) uncontrolled, (b) controlled

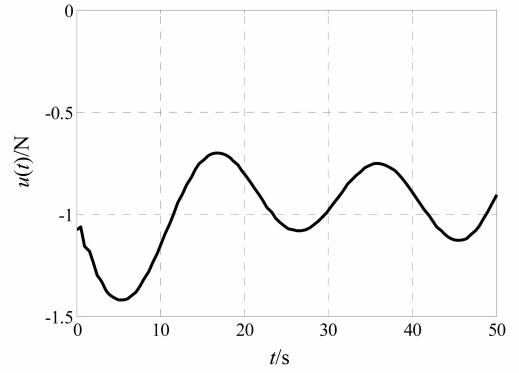


图5 自适应边界控制输入
Fig. 5 Adaptive boundary control input

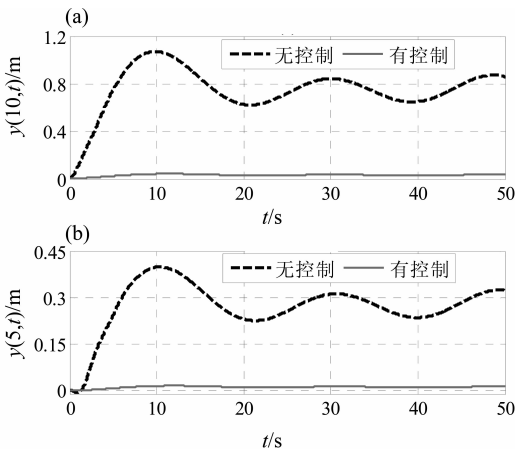


图3 柔性机械臂偏移量：(a) $x = 10\text{ m}$ ，(b) $x = 5\text{ m}$
Fig. 3 Displacements of manipulator at: (a) $x = 10\text{ m}$ ，(b) $x = 5\text{ m}$

4 结 论

本文研究了具有边界未知扰动和系统结构参数都不确定的柔性机械臂振动主动控制问题。基于Hamilton原理建立的柔性机械臂无穷维分布参数模型，设计了带有边界干扰观测器的鲁棒自适应边界控制对柔性臂振动进行控制。所设计的鲁棒自适应控制器除了能避免基于降阶模型而导致的控制溢出外，还具有很强的鲁棒性和自适应性，能有效的补偿系统结构参数和边界扰动的不确定性，并能实现对边界未知扰动的跟踪、抑制和补偿。本文所设计的振动控制方法保证了柔性臂系统的稳定性和一致有界性。最后对设计的鲁棒自适应边界控制算法进行了数值仿真研究，验证了算法的有效性。

参考文献：

- [1] 刘屿, 黄浩维, 邹依林, 等. 基于 Lyapunov 直接法的柔性梁振动控制[J]. 华南理工大学学报:自然科学版, 2013, 41(2): 24-29.
- [2] 张德江, 张袅娜. 参数不确定柔性机械手的快速终端滑模控制[J]. 控制与决策, 2010, 25(3): 433-436.
- [3] LOGAN J D. Applied mathematics [M]. New York: Wiley, 2006.
- [4] 丁希仑, 张启先. 机器人柔性臂动力学建模的 D-Holzer 法[J]. 机械工程学报, 1999, 35(3): 25-28.
- [5] VANDEGRIFT M W, LEWIS F L, ZHU S Q. Flexible-link robot arm control by a feedback linearization/singular perturbation approach [J]. Journal of Robotic Systems, 1994, 11(7): 591-603.
- [6] BALAS M J. Feedback control of flexible systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, 23(4): 673-679.
- [7] LIU Y, XU B S, WU Y L, et al. Boundary control of an axially moving belt [C] // Chinese Control Conf. Xi'an

知扰动，而仿真结果图5给出了控制输入情况。

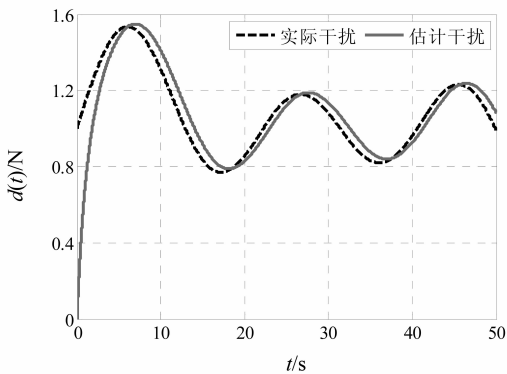


图4 边界未知扰动跟踪
Fig. 4 Tracking of unknown boundary disturbance

- China, 2013: 1228 – 1233.
- [8] LIU Y, HUANG H W, GAO H X, et al. Modeling and boundary control of a flexible marine riser coupled with internal fluid dynamics [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2013, 11(2): 316 – 323.
- [9] 张伟, 陈立群. 轴向运动弦线横向振动控制的 Lyapunov 方法[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(4): 531 – 535.
- [10] 邬依林, 刘屿. 分布参数柔性梁的建模与振动边界控制[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2013, 52(3): 55 – 62.
- [11] KRSTIC M, SMYSHLYAEV A. Backstepping boundary controller and observer designs for the slender Timoshenko beam [C]//*Proc of IEEE Conference on Decision and Control*. Seville: IEEE Press, 2005: 1 – 8.
- [12] ENDO T, MATSUNO F, KAWASAKI H. Simple boundary cooperative control of two one-link flexible arms for grasping [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2470 – 2476.
- [13] ZHANG L J, LIU J K. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(1): 43 – 51.
- [14] 吴忻生, 邓军. 末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界控制[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(4): 511 – 518.
- [15] 杜燕, 许跟起. 具有边界控制的线性 Timoshenko 型系统术的指数稳定性[J]. *系统科学与数学*, 2008, 28(5): 554 – 575.

~~~~~

(上接第 43 页)

- [12] 卫雪梅, 崔尚斌. 一个肿瘤生长自由边界问题解的整体存在性和唯一性[J]. *数学物理学报*, 2006, 26: 1 – 8.
- [13] CUI S, WEI X. Global existence for a parabolic-hyperbolic free boundary problem modeling tumor growth [J]. *Acta Math Appl Sinica, English series*, 2005, 4: 597 – 614.
- [14] WEI X, CUI S. Global well-posedness for a drug transport model in tumor multicell spheroids [J]. *Math and Comput Modelling Sci*, 2007, 45: 553 – 563.
- [15] WEI X, CUI S. Existence and uniqueness of the global solution for a mathematical model of the use of macrophages in tumor medicine [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Appl*, 2007, 8: 922 – 938.
- [16] WEI X, CUI S. Existence and uniqueness of global solutions for a mathematical model of antiangiogenesis in tumor growth [J]. *Nonlinear Analysis*, 2008, 9: 1827 – 1836.
- [17] LIAO K L, BAI X F, FRIEDMAN A. The role of CD200-CD200R in tumor immune evasion [J]. *Journal of Theoretical Bio*, 2013, 382: 65 – 76.